PRIMER PARCIAL(8/11/2017) PARTE 1

1. La forma canónica de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&2&4&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$ es:

SOLUCIÓN:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&2&4&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}\underset{E_{23}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}\underset{E_{12}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}\underset{E_{32}(2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&-1\\0&0&6&-3\end{pmatrix}\underset{E_2(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&6&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\underset{E_3\left(\frac{1}{6}\right)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}\underset{E_{23}(1)}{\sim}\underset{E_{13}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}=Can(A)$$

E_{13}

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&2&4&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$ calculad la *(0,3)*dimensión del subespacio col(A) y *(0,3)*la base usual de dicho subespacio:

SOLUCIÓN:

dim(col(A))= rg(A)= rg $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&2&4&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$=3

y como el único subespacio de dimensión tres de $\mathbb{R}^3$ es el propio $\mathbb{R}^3$, será B_u(col(A))=$B_C(\mathbb{R}^3)$=$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

3. Calculad las ecuaciones implícitas del subespacio Ker(A), siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&2&4&-1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: Al ser rg(A)=3, la dimensión de Ker (A) valdrá uno y sus ecuaciones implícitas nos las da la forma canónica de la matriz y son $\begin{pmatrix}1&0&0&3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

4. Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$ $B(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B^*(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$Calculad *(0,5)*las ecuaciones del cambio de base de $B(\mathbb{R}^2)$ a $B^*(\mathbb{R}^2)$. Si $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_B$, ¿ *(0,3)*Cuáles son sus coordenadas con respecto a $B^*(\mathbb{R}^2)$.

SOLUCIÓN:

$$C(B,B^*)\approx\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&-1&1\\2&3&1&1\end{array}\right]\underset{E_{21}(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&-1&1\\0&-1&3&-1\end{array}\right]\underset{E_{12}(2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&5&-1\\0&-1&3&1\end{array}\right]$$

Entonces $C(B,B^*)=\begin{pmatrix}5&-1\\-3&-1\end{pmatrix}$ y las ecuaciones pedidas n

$\overrightarrow{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_{B^*}}=\begin{pmatrix}5&-1\\-3&-1\end{pmatrix}\overrightarrow{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_B}$. Entonces $\overrightarrow{w_{B^*}}=C(B,B^*)\overrightarrow{w_B}$=$\begin{pmatrix}5&-1\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix}_{B^*}$

4. Dado el subespacio $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$determinar la base de otro subespacio T, de manera que $S\oplus T=\mathbb{R}^4$

SOLUCIÓN: Los tumbamos y formamos la matriz

A=$\begin{pmatrix}0&0&-2&3\\0&1&-1&5\end{pmatrix}$

Y la ampliamos con los vectores convenientes de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ hasta que obtenemos una matriz de rango 4

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&5\\0&0&-2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

El subespacio pedido es, entonces el de base B(T)= $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

5. Si consideramos las bases de $\mathbb{R}^5$, B($\mathbb{R}^5$)=$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3.\vec{v}_4,\vec{v}_5\}$ y B*($\mathbb{R}^5$) =$\{\vec{v}_1,\vec{v}_3,-\vec{v}_2.\overline{-}\vec{v}_5,\vec{v}_4\}$y tenemos el vector $\vec{v}_B=\begin{pmatrix}1\\6\\9\\0\\5\end{pmatrix}_B$ sus coordenadas con respecto a la base B*($\mathbb{R}^5$) son $\vec{v}_{B*}=\begin{pmatrix}1\\9\\-6\\-5\\0\end{pmatrix}_{B*}$

6. Dados los subespacios $W,\ con\ B(W)=\left\{\vec{w}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\vec{w}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ y S definido con las ecuaciones paramétricas $\begin{bmatrix}x=4\alpha\\y=-3\alpha\\z=-\alpha\\t=2\alpha\end{bmatrix}$, comprobar si se trata o no de dos subespacios ortogonales (explicadlo, si no se explica puntúa con cero puntos)

SOLUCIÓN: Una base del subespacio S es $B(S)=\left\{\vec{s}_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$, y como el producto escalar de $\langle\vec{w}_2,\vec{s}_1\rangle=4\neq0$, dichos subespacios no pueden ser ortogonales al no serlo dos de sus representantes (base).

7. Calcular el complemento ortogonal del plano de $\mathbb{R}^3$de ecuación $x-y+2z=0$, especificando una base de dicho complemento.
SOLUCIÓN: El c.o. De un plano en $\mathbb{R}^3$es su recta normal, cuya base es el vector normal al plano $B(normal)=\left\{\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

8. Si se aplica el método de Gram Schmidt para ortogonalizar la base de $\mathbb{R}^{30}$, B($\mathbb{R}^{30}$)=$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3.\vec{v}_4,\ldots\ \vec{v}_{30}\}$, y se obtiene la base ortogonal , B^{ORTG}($\mathbb{R}^{30}$)=$\{\vec{o}_1,\vec{o}_2,\vec{o}_3.\vec{o}_4,\ldots\ \vec{o}_{30}\}$, se pregunta, ¿cuál es el coeficiente de $\vec{o}_3$en la fórmula del vector $\vec{o}_{17}$de la base ortogonal ?

SOLUCIÓN: Dicho coeficiente sería obtenido con la fórmula $-\frac{\langle\vec{v}_{17},\vec{o}_3\rangle}{\|\vec{o}_3\|^2}$

9. Calcular la distancia del vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ al plano de ecuación $x-y+2z=0$.

SOLUCIÓN: La Distancia vale cero pues el vector está en el plano

10. Calcular las coordenadas del vector $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$con respecto a la base ortogonal
B^{ORTG}($\mathbb{R}^3$)=$\left\{\vec{o}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix},\vec{o}_2=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix},\vec{o}_3=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\}$

SOLUCIÓN: Sus coordenadas valen $x=\frac{\langle\vec{u},\vec{o}_1\rangle}{\|\vec{o}_1\|^2}=-2, y=\frac{\langle\vec{u},\vec{o}_2\rangle}{\|\vec{o}_2\|^2}=0, z=\frac{\langle\vec{u},\vec{o}_3\rangle}{\|\vec{o}_3\|^2}=-1$

PRIMER PARCIAL(8/11/2017) PARTE 1

1. La forma canónica de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}$ es:

SOLUCIÓN:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}\underset{E_{12}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}\underset{E_{32}(2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&-1\\0&0&6&-3\end{pmatrix}\underset{E_2(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&6&-3\end{pmatrix}\underset{E_3(1/4)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

2. $$\sim\underset{E_3\left(\frac{1}{6}\right)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}\underset{E_{23}(1)}{\sim}\underset{E_{13}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}=Can(A)$$

E_{13}

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}$ calculad la *(0,3)*dimensión del subespacio col(A) y *(0,3)*la base usual de dicho subespacio:

SOLUCIÓN:

dim(col(A))= rg(A)= rg $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}$=3

y como el único subespacio de dimensión tres de $\mathbb{R}^3$ es el propio $\mathbb{R}^3$, será B_u(col(A))=$B_C(\mathbb{R}^3)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

4. Calculad las ecuaciones implícitas del subespacio Ker(A), siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&-1&1&-1\\0&2&4&-1\end{pmatrix}$

5. **SOLUCIÓN:** Al ser rg(A)=3, la dimensión de Ker (A) valdrá uno y sus ecuaciones implícitas nos las da la forma canónica de la matriz y son $\begin{pmatrix}1&0&0&3/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

6. Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$ $B(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B^*(\mathbb{R}^2)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right\}$Calculad *(0,5)*las ecuaciones del cambio de base de $B(\mathbb{R}^2)$ a $B^*(\mathbb{R}^2)$. Si $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_B$, ¿ *(0,3)*Cuáles son sus coordenadas con respecto a $B^*(\mathbb{R}^2)$.

SOLUCIÓN:

$$C(B,B^*)\approx\left[\begin{array}{cc|cc}-1&2&-1&0\\2&-5&1&1\end{array}\right]\underset{E_{21}(2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}-1&2&-1&0\\0&-1&-1&1\end{array}\right]\underset{E_{12}(2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|cc}-1&0&-3&2\\0&-1&-1&1\end{array}\right]$$

Entonces $C(B,B^*)=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}$ y las ecuaciones pedidas son

$\overrightarrow{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_{B^*}}=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}\overrightarrow{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_B}$. Entonces $\overrightarrow{w_{B^*}}=C(B,B^*)\overrightarrow{w_B}$=$\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\end{pmatrix}_{B^*}$

4. Dado el subespacio $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$determinar la base de otro subespacio T, de manera que $S\oplus T=\mathbb{R}^4$

SOLUCIÓN: Los tumbamos y formamos la matriz

A=$\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&1&-1&5\end{pmatrix}$

Y la ampliamos con los vectores convenientes de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ hasta que obtenemos una matriz de rango 4

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&1&-1&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

El subespacio pedido es, entonces el de base B(T)=$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

7. Si consideramos las bases de $\mathbb{R}^5$, B($\mathbb{R}^5$)={$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3. \vec{v}_4, \vec{v}_5$} y B*($\mathbb{R}^5$) ={$\overrightarrow{-v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2. \overrightarrow{-v}_5, \vec{v}_4$}y tenemos el vector $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}_B$ sus coordenadas con respecto a la base B*($\mathbb{R}^5$) son $\vec{v}_{B*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}_{B*}$

8. Dados los subespacios $W,\ con\ B(W) = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y S definido con las ecuaciones paramétricas $\begin{bmatrix} x = \alpha \\ y = -3\alpha \\ z = -\alpha \\ t = -\alpha \end{bmatrix}$, comprobar si se trata o no de dos subespacios ortogonales (explicadlo, si no se explica puntúa con cero puntos)

SOLUCIÓN: Una base del subespacio S es $B(S) = \left\{ \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, y como el producto escalar de $\langle \vec{w}_2, \vec{s}_1 \rangle = 4 \neq 0$, dichos subespacios no pueden ser ortogonales al no serlo dos de sus representantes (base).

9. Calcular el complemento ortogonal del plano de $\mathbb{R}^3$de ecuación $x - 3y + 4z = 0$, especificando una base de dicho complemento.

SOLUCIÓN: El c.o. De un plano en $\mathbb{R}^3$es su recta normal, cuya base es el vector normal al plano $B(normal) = \left\{ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Si se aplica el método de Gram Schmidt para ortogonalizar la base de $\mathbb{R}^{35}$, B($\mathbb{R}^{35}$)={$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3. \vec{v}_4, \dots\ \vec{v}_{35}$}, y se obtiene la base ortogonal , B^{ORTG}($\mathbb{R}^{35}$)={$\vec{o}_1, \vec{o}_2, \vec{o}_3. \vec{o}_4, \dots\ \vec{o}_{35}$}, se pregunta, ¿cuál es el coeficiente de $\vec{o}_2$en la fórmula del vector $\vec{o}_{15}$de la base ortogonal ?

SOLUCIÓN: Dicho coeficiente sería obtenido con la fórmula $-\frac{\langle \vec{v}_{15}, \vec{o}_2 \rangle}{\|\vec{o}_2\|^2}$

10. Calcular la distancia del vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ al plano de ecuación $x - 3y + 4z = 0$.

SOLUCIÓN: La Distancia vale cero pues el vector está en el plano

11. Calcular las coordenadas del vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$con respecto a la base ortogonal

B^{ORTG}($\mathbb{R}^3$)=$\left\{ \vec{o}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}, \vec{o}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}, \vec{o}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

SOLUCIÓN: Sus coordenadas valen $x = \frac{\langle \vec{u}, \vec{o}_1 \rangle}{\|\vec{o}_1\|^2} = -2, y = \frac{\langle \vec{u}, \vec{o}_2 \rangle}{\|\vec{o}_2\|^2} = 2, z = \frac{\langle \vec{u}, \vec{o}_3 \rangle}{\|\vec{o}_3\|^2} = 3$